

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1965 - 010

Eindig voortgebrachte commutatieve halfgroepen

door

A.B. Paalman - de Miranda

Definitie: Een verzameling elementen $a_1, a_2, \dots, a_n$ van een commutatieve topologische halfgroep S heet een stel voortbrengenden van S als de verzameling $\{a_{j_1}^{n_1} \dots a_{j_k}^{n_k}\}$, $j_i = 1, \dots, n$, $n_i = 1, 2, \dots$ overal dicht ligt in S .

S heet monothetisch als S door één element a wordt voortgebracht, dus als $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ dicht ligt in S .

Een topologische groep G heet monothetisch als er een element $g \in G$ is, zo dat $\{g^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ dicht ligt in G . In het compacte geval vallen deze twee begrippen samen. Immers dan is $\{g^n\}_{n=1}^{\infty}$ een compacte deelhalfgroep van G en dus een ondergroep van G .

Hieruit volgt dat $\{g^n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \{g^n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \{g^n\}_{n=1}^{\infty} = G$.

Iedere monothetische halfgroep S is blijkbaar commutatief.

Zij nu S een willekeurige compacte halfgroep en stel $a \in S$. (Met $\Gamma(a)$ zullen wij de afsluiting van de verzameling $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ in S aangeven.

Men kan bewijzen dat de compacte halfgroep $\Gamma(a)$ precies één idempotent element e bevat en dat de verzameling limietpunten van de rij $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ een groep $H(e)$ vormt.

$H(e)$ is de grootste ondergroep van $\Gamma(a)$ die e omvat en $H(e) = \Gamma(a) \cdot e$.
 Verder is $H(e)$ een compacte monothetische groep met voortbrengende ae .
 $H(e)$ is tevens de kern van de halfgroep $\Gamma(a)$.

Stelling 1. Zij S een compacte commutatieve halfgroep voortgebracht door n elementen. Dan heeft S hoogstens $2^n - 1$ idempotente elementen.

Bewijs:

Stel $a_1, a_2, \dots, a_n$ de voortbrengenden van S .

Daar $\Gamma(a_1) \cup \Gamma(a_2) \cup \dots \cup \Gamma(a_n) \cup \Gamma(a_1)\Gamma(a_2) \cup \dots \cup \Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\dots\Gamma(a_n)$ een compact deel is van S , dat alle machten $a_{j_1}^{n_1} \dots a_{j_k}^{n_k}$ bevat, is

$$S = \bigcup_{j_1, \dots, j_k} \Gamma(a_{j_1}) \dots \Gamma(a_{j_k}).$$

S is dus de vereniging van $2^n - 1$ compacte deelhalfgroepen.

Wij bewijzen nu dat elk van deze halfgroepen precies één idempotent element bevat.

Stel $e_i \in \Gamma(a_i)$ $i=1, \dots, n$ en f een willekeurig idempotent element uit

$\Gamma(a_{j_1}) \dots \Gamma(a_{j_k})$. Dan is f te schrijven als $f = b_{j_1} \dots b_{j_k}$ met

$b_{j_i} \in \Gamma(a_{j_i})$ ($i=1, \dots, k$). Tevens geldt daar $f^r = f$, $r=1, 2, \dots$, dat

$$f = b_{j_1}^r b_{j_2}^r \dots b_{j_k}^r \Rightarrow f \in b_{j_1}^r \Gamma(a_{j_1}) \dots \Gamma(a_{j_k}), \quad r=1, 2, \dots$$

Daar $\Gamma(b_{j_1}^r) \subset \Gamma(a_{j_1})$ geldt dat $e_{j_1} \in \Gamma(b_{j_1}^r)$ en dus is e_{j_1} limietpunt van de rij $\{b_{j_1}^r\}_{r=1}^\infty$. Uit de continuïteit van de vermenigvuldiging

en de compactheid van $\Gamma(a_{j_2}) \dots \Gamma(a_{j_k})$ volgt dat $f \in e_{j_1} \Gamma(a_{j_2}) \dots \Gamma(a_{j_k})$.

Dus $fe_{j_1} = f$.

Op dezelfde wijze bewijst men dat $fe_{j_i} = f$, $i=2, \dots, k$ en dus dat

$$f(e_{j_1} \dots e_{j_k}) = f.$$

Aan de andere kant heeft men $f(e_{j_1} \dots e_{j_k}) = (b_{j_1} e_{j_1}) \dots (b_{j_k} e_{j_k}) \in$

$H(e_{j_1}) \dots H(e_{j_k})$. Daar $H(e_{j_1}) \dots H(e_{j_k})$ bevat is in de maximale ondergroep van S die het idempotent element $e_{j_1} \dots e_{j_k}$ omvat en

$f(e_{j_1} \dots e_{j_k})$ een idempotent element is, volgt hieruit dat

$f = f(e_{j_1} \dots e_{j_k}) = e_{j_1} \dots e_{j_k}$. De halfgroep $\Gamma(a_{j_1}) \dots \Gamma(a_{j_k})$ heeft dus precies één idempotent element.

Gevolg: $\Gamma(a_{i_1})\Gamma(a_{i_2})\dots\Gamma(a_{i_k}) \cap \Gamma(a_{j_1})\Gamma(a_{j_2})\dots\Gamma(a_{j_r}) = \emptyset$,
dan en slechts dan als $e_{i_1}\dots e_{i_k} \neq e_{j_1}\dots e_{j_r}$.

Bewijs:

Stel $b \in \Gamma(a_{i_1})\dots\Gamma(a_{i_k}) \cap \Gamma(a_{j_1})\dots\Gamma(a_{j_r})$.

Dan $\Gamma(b) \subset \Gamma(a_{i_1})\dots\Gamma(a_{i_k}) \cap \Gamma(a_{j_1})\dots\Gamma(a_{j_r})$.

Daar zowel $\Gamma(b)$ als $\Gamma(a_{i_1})\dots\Gamma(a_{i_k})$ en $\Gamma(a_{j_1})\dots\Gamma(a_{j_r})$ precies één idempotent element bevatten, geldt $e_{i_1}\dots e_{i_k} = e_{j_1}\dots e_{j_r}$.

Opmerking: Stelling 1 geldt niet als $n \geq \chi_0$. Stel bijv. $I = [0,1]$ met de gewone vermenigvuldiging van de reële getallen en laat I^I het directe product zijn van continu veel copieën van I . Dan bevat I^I , 2^c veel idempotente elementen.
 I^I is separabel en bevat dus zeker een overal dichte deelhalfgroep met aftelbaar veel voortbrengenden.

Stelling 2. Zij S een compacte commutatieve halfgroep, voortgebracht door n elementen. Dan heeft S precies één idempotent element of S is een semilattice van compacte deelhalfgroepen met precies één idempotent, waarvan minstens één voortgebracht wordt door $m \leq n$ elementen.

Bewijs:

Stel $S_\alpha = e_{j_1}\dots e_{j_k} \cup \Gamma(a_{j_1})\dots\Gamma(a_{j_k})$. Dan is S_α een compacte deelhalfgroep van S . Immers als $e_{j_1}\dots e_{j_k} = e_{i_1}\dots e_{i_r} = e_\alpha$ en $x \in \Gamma(a_{j_1})\dots\Gamma(a_{j_k})$, $y \in \Gamma(e_{i_1})\dots\Gamma(e_{i_r})$ dan $e_\alpha \in \Gamma(x)$ en $e_\alpha \in \Gamma(y) \Rightarrow e_\alpha \in \Gamma(xy) \subset \Gamma(x)\Gamma(y)$.

Dus $xy \in \Gamma(a_{t_1})\dots\Gamma(a_{t_l})$ met $e_{t_1}\dots e_{t_l} = e_\alpha$.

Uit stelling 1 volgt tevens dat S_α precies één idempotent element bevat en dat $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$ als $e_\alpha \neq e_\beta$.

S_α is de verzameling van alle $x \in S$ met $e_\alpha \in \Gamma(x)$.

Laat nu de verzameling E van alle idempotenten $e_\alpha \in S$ geordend zijn door middel van $\leq$, waarbij $e_\alpha \leq e_\beta$ als $e_\alpha e_\beta = e_\alpha$. Het is duidelijk dat $\leq$ een partiële ordening is.

Definiëren wij nu $S_\alpha \leq S_\beta$ als $e_\alpha \leq e_\beta$, dan wordt S een semilattice van compacte deelhalfgroepen S_α .

Laat tenslotte e_α een maximaal idempotent uit E zijn. Dan is $e_\alpha = e_i \in \Gamma(a_i)$ voor minstens één voortbrengende a_i . Men gaat nu gemakkelijk na dat S_α dan voortgebracht wordt door de a_i met $e_i = e_\alpha$.

Stelling 3. Zij S een compacte commutatieve halfgroep voortgebracht door n elementen $a_1, \dots, a_n$ en stel dat S precies één idempotent element bevat. Dan is de verzameling limietpunten van $\{a_{j_1}^{n_1} \dots a_{j_k}^{n_k}\}$, $j_i = 1, \dots, n$, $n_i = 1, \dots$ een groep, die gelijk is aan de kern van S .

Bewijs:

Stel $e = e^2 \in S$ en $H_j(e)$ de kern van $\Gamma(a_j)$, $j=1, \dots, n$.

Zij K de kern van S . Dan is, daar S maar één idempotent element e bevat, K gelijk aan de maximale ondergroep $H(e)$ van S die e bevat.

Er geldt dus $H_1(e)H_2(e)\dots H_n(e) \subset H(e) = K$.

Daar ieder element van S te schrijven is als $b_{j_1} \dots b_{j_k}$ met $b_{j_i} \in \Gamma(a_{j_i})$ en $K = Se$, geldt voor willekeurige $x \in K$, $x = xe = b_{j_1}^{n_1} \dots b_{j_k}^{n_k} e = (b_{j_1} e) \dots (b_{j_k} e) \in H_{j_1}(e) \dots H_{j_k}(e) \subset H_1(e) \dots H_n(e)$.

Dus $K = H_1(e) \dots H_n(e)$.

Het is duidelijk dat ieder element $x \in H_1(e) \dots H_n(e)$ limietpunt is van $\{a_{j_1}^{n_1} \dots a_{j_k}^{n_k}\}$.

Zij nu omgekeerd y limietpunt van $\{a_{j_1}^{n_1} \dots a_{j_k}^{n_k}\}$. Dan bevat iedere omgeving van y punten $a_{j_1}^{n_1} \dots a_{j_k}^{n_k}$ met bijv. willekeurig grote n_i . Hieruit volgt dan dat

$y \in a_{j_1}^r S$, $r=1, 2, \dots$. Daar S compact is volgt hieruit $y \in eS = K$.

K is dus de verzameling limietpunten van $\{a_{j_1}^{n_1} \dots a_{j_k}^{n_k}\}$.

Opmerking: Heeft S meer dan één idempotent element, dan is de verzameling limietpunten echt groter dan de kern K van S .

Is S een lokaal compacte monothetische halfgroep met een kern K die niet leeg is, dan kan men bewijzen dat S compact is. Deze stelling is niet meer juist als S door meer dan één element wordt voortgebracht. Zo is bijv. de groep van de gehele getallen $\mathbb{Z}$ een lokaal compacte halfgroep voortgebracht door 3 elementen met kern $K = \mathbb{Z}$.

Literatuur:

- K. Numakura: On bicomact semigroups, Math. J. Okayama Univ. 1 (1952).
R.J. Koch : On monothetic semigroups, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957).
St. Schwarz: K teorii khaudorfovykh bikompaktnykh polugrupp, Czech. Math. J. 5 (1955).